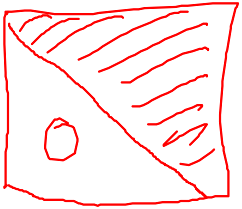
3.7 Dreiecksmatrizen



Definition: Eine $m \times m$-Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$ mit

(a) $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$ heisst *obere Dreiecksmatrix*,

(b) $a_{ij} = 0$ für alle $i < j$ heisst *untere Dreiecksmatrix*.

Proposition: Für jede obere Dreiecksmatrix mit allen Diagonaleinträgen gleich 1 gilt:

(a) Sie kann durch eine Folge elementarer Zeilenumformungen der Art „Addiere ein Vielfaches einer späteren Zeile zu einer früheren“ in die Einheitsmatrix überführt werden.

(b) Sie ist ein Produkt von Matrizen $I_m + \lambda E_{ij}$ für gewisse $\lambda \in K$ und $i < j$.

Proposition: Für je zwei obere Dreiecksmatrizen A und B derselben Grösse sind auch $A + B$ und $A \cdot B$ obere Dreiecksmatrizen, und deren Diagonaleinträge sind die Summe bzw. das Produkt der entsprechenden Diagonaleinträge von A und B.

Bew. für $A \cdot B$:

$A = (a_{ij})_{i,j}$ mit $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$

$B = (b_{jk})_{j,k}$ mit $b_{jk} = 0$ für alle $j > k$.

$$AB = \Big(\sum_j \underbrace{a_{ij}}_{\substack{= 0 \\ \text{falls } i > j}} \underbrace{b_{jk}}_{\substack{= 0 \\ \text{falls } j > k}} \Big)_{i,k}$$

Falls $i > k$ ist, gilt für alle j: $i > j$ oder $j \geq i > k$.

Dann verschwinden alle Summanden.

$\Rightarrow AB$ obere Dreiecksmatrix.

Für $i = k$ fallen alle Summanden für $j \neq i$ weg

und es bleibt: $a_{ii} \cdot b_{ii}$.

<u>qed</u>.

Proposition: Jede Links- oder Rechtsinverse einer oberen Dreiecksmatrix ist wieder eine obere Dreiecksmatrix.

Bew.: Induktion über m. $m=0$: tautologisch.

$m-1 \rightsquigarrow m$: $A = \left(\begin{array}{c|c} B & v \\ \hline 0 & a \end{array}\right)\begin{array}{l} \}\, m-1 \\ \}\, 1 \end{array}$ mit oberer Dreiecksmatrix B.

Sei $I_m = \begin{pmatrix} B & v \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & w \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} B\cdot X + vZ & BY + vw \\ \hline aZ & aw \end{array}\right)$

$I_m = \left(\begin{array}{c|c} I_{m-1} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$

$\Rightarrow aw = 1$
$\Rightarrow a \neq 0$
und $aZ = 0$ $\Big\} \Rightarrow Z = 0$.

und $I_{m-1} = BX + vZ = BX$

Ind.Vor. $\Rightarrow X$ ist eine obere Dreiecksmatrix.

$\Rightarrow \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & w \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline 0 & w \end{array}\right)$ ebenfalls.

Proposition: Für jede Dreiecksmatrix A der Grösse $m \times m$ sind äquivalent:

(a) Die Matrix A ist invertierbar.

(b) Es existiert eine $m \times m$-Matrix A' über K mit $A' \cdot A = I_m$ (Linksinverse).

(c) Es existiert eine $m \times m$-Matrix A'' über K mit $A \cdot A'' = I_m$ (Rechtsinverse).

(d) Alle Diagonaleinträge von A sind ungleich Null.

Bew.:

$$\begin{tikzcd} & & (b) \arrow[dr, Rightarrow] & \\ (d) \arrow[r, Rightarrow] & (a) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & (d) \\ & & (c) \arrow[ur, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

A obere Dreiecksmatrix. $A = (a_{ij})_{ij}$, $A'' = (a''_{jk})_{jk}$

$A \cdot A'' = I_m \Rightarrow A''$ obere Dreiecksmatrix

$\Rightarrow AA''$ hat Diagonaleinträge $a_{ii} \cdot a''_{ii} = 1$

$\Rightarrow a_{ii} \neq 0$.

Rest analog.

qed.

Definition: Eine Matrix heisst *in Zeilenstufenform*, wenn die von Null verschiedenen Terme in jeder Zeile echt später beginnen als in der Zeile davor.

Fakt: Jede quadratische Matrix in Zeilenstufenform ist eine obere Dreiecksmatrix.

3.8 Dreieckszerlegung von Matrizen

ZSF

Satz: Für jede Matrix A existieren eine Permutationsmatrix P und eine invertierbare untere Dreiecksmatrix U, so dass UPA Zeilenstufenform hat.

Bew.: Sei A eine $m \times n$-Matrix.

$n = 0$: $U = P = I_m$ tun's.

$n > 0$: Ist $A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right)$ mit Spaltenbreiten $\underbrace{}_{1}$ und $\underbrace{}_{n-1}$ $\rightsquigarrow$ Nach IV existieren P, U mit UPB Zeilenstufenform.

$$UPA = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & UPB \\ 0 & \end{array}\right) \text{ ebenso.}$$

Sonst ist $A = (a_{ij})_{i,j}$ und $\exists\, i : a_{i1} \neq 0$.

Setze
$$P := \begin{cases} I_m & \text{falls } i = 1 \\ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & & \\ & & & 1 \cdots & 1 \end{pmatrix} & \end{cases} \Rightarrow PA = \left(\begin{array}{c|c} a_{i1} & * \\ \hline v & B \end{array}\right)$$
(Positionen 1, i)

Setze
$$U := \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline -\frac{v}{a_{i1}} & I_{m-1} \end{array}\right) \Rightarrow \underline{\underline{UPA}} = \left(\begin{array}{c|c} a_{i1} & * \\ \hline 0 & B' \end{array}\right)$$

IV $\Rightarrow$ $\exists\, P'$ Permutationsmatrix
$\exists\, U'$ invertierbare untere Dreiecksmatrix
so dass $U'P'B'$ hat ZSF.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} U P A}_{=} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u'P' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{i1} & * \\ 0 & B' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & * \\ 0 & u'P'B' \end{pmatrix}}_{\text{hat ZSF.}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u' \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & I_{n-1} \end{pmatrix}}_{=} \cdot P \cdot A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & I_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & I_{n-1} \end{pmatrix}\right]}_{\substack{\text{invertierbare} \\ \text{untere} \\ \text{Dreiecksmatrix.}}} \cdot \underbrace{\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} P\right]}_{\text{Permutationsmatrix}} \cdot A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P'w & P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P'w & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix}$$

qed.

Satz: *(LR-Zerlegung)* Für jede invertierbare Matrix A existieren eine Permutationsmatrix P, eine invertierbare untere Dreiecksmatrix L, und eine invertierbare obere Dreiecksmatrix R, so dass gilt

$$PA = LR.$$

Bew.: Seien P, U wie in vorigem Satz $\Rightarrow$ $UPA =: R$ hat ZSF.

$\Rightarrow$ R obere Dreiecksmatrix. A, P, U invertierbar $\Rightarrow$ R invbar.

$\Rightarrow$ $PA = U^{-1} \cdot R = LR$ mit $L := U^{-1}$ inv. bare untere Dreiecksmatrix.

qed.

Folge: $A = P^{-1} \cdot L \cdot R$.

Satz: *(Bruhat-Zerlegung)* Für jede invertierbare Matrix A existieren eine Permutationsmatrix P und invertierbare obere Dreiecksmatrizen B und B', so dass gilt

$$A = BPB'.$$

Satz: Für jede $m \times m$-Matrix sind äquivalent:

(a) Die Matrix ist invertierbar.

(b) Die Matrix lässt sich durch elementare Zeilenoperationen in eine invertierbare Dreiecksmatrix überführen.

(c) Die Matrix lässt sich durch elementare Zeilenoperationen in die Einheitsmatrix überführen.

(d) Die Matrix ist ein Produkt von Matrizen der Form $I_m + \lambda E_{ij}$ für $i \neq j$ und Permutationsmatrizen und invertierbaren Diagonalmatrizen.

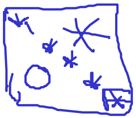
(e) Während der Gauss-Elimination bleiben alle Zeilen ungleich Null.

(f) Es existiert eine $m \times m$-Matrix A' über K mit $A' \cdot A = I_m$ (Linksinverse).

(g) Es existiert eine $m \times m$-Matrix A' über K mit $A \cdot A' = I_m$ (Rechtsinverse).

In jedem der Fälle (f) und (g) ist die Matrix A' die eindeutig bestimmte Inverse A^{-1}.

Bem.: Seien U, P wie oben, so dass $R := UPA$ in ZSF ist $\Rightarrow$ R ist obere Dreiecksmatrix.



R ist invertierbar gdw. ihr Eintrag rechts unten $\neq 0$ ist.

Insbesondere gilt (b) $\Leftrightarrow$ (e).

(b) $\Rightarrow$ (c) ✓

(c) $\Rightarrow$ (d) ✓

(d) $\Rightarrow$ (a) ✓

(a) $\Rightarrow$ (b) ✓

(a) $\Rightarrow$ (f), (g)

(g) $\Rightarrow$ (a) Sei $AA' = I_m$. $\Rightarrow RA' = UPAA' = UP =$ invertierbar.

$\Rightarrow R \cdot A' \cdot (UP)^{-1} = (UP) \cdot (UP)^{-1} = I_m$.

$\Rightarrow A' \cdot (UP)^{-1}$ ist ein Rechtsinverses von R.

$\Rightarrow R$ invertierbar $\Rightarrow A = (UP)^{-1} \cdot R$ invertierbar

(f) $\Rightarrow$ (a) analog. Eindeutigkeit wie früher. qed.

Proposition: Sei A eine $m \times n$-Matrix, und sei (A, I_m) die durch Zusammensetzen entstehende $m \times (n+m)$-Matrix. Seien B eine $m \times n$-Matrix und U eine $m \times m$-Matrix, so dass (B, U) durch eine Folge elementarer Zeilenoperationen aus (A, I_m) entsteht. Dann gilt

$$\boxed{B \;=\; UA.}$$

Bew.: Wir haben V invertierbar mit $\underbrace{V \cdot (A, I_m)}_{(VA,\, V)} = (B, U)$ $\Rightarrow$ $V = U$ und $B = VA = UA$. qed.

Folge: Für jede invertierbare $m \times m$ Matrix A führt die vollständige Gauss-Elimination von der Matrix (A, I_m) auf die Matrix (I_m, A^{-1}).

Bew.: Sei (I_m, U) die resultierende Matrix.
Dann ist $I_m = U \cdot A \Rightarrow U = A^{-1}$. qed.

Variante: Seien A eine $m \times m$-Matrix und B eine $m \times n$-Matrix, und sei (A, B) die durch Zusammensetzen entstehende $m \times (m+n)$-Matrix. Sei C eine $m \times n$-Matrix, so dass (I_m, C) durch eine Folge elementarer Zeilenoperationen aus (A, I_m) entsteht. Dann ist A invertierbar und C die eindeutige Lösung der Gleichung $AC = B$, das heisst

$$C \;=\; A^{-1}B.$$

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ über $K = \mathbb{Q}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad -1, \; -1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \cdot \frac{-1}{2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -3 & 4 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad +3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 & -3/2 \end{array}\right) \quad -1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 & -3/2 \end{array}\right) \quad +1, \; +2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/2 & 2 & -5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 & -3/2 \end{array}\right)$$

Kontrolle:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 & 2 & -5/2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1/2 & 1 & -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OKAY